IOAA 2021 Vorrunde

Aufgaben vorbereitet: Ivan Kokhanovskyi [1,2,3,4] und Lukas Schicht [5]
Kritisch gelesen: Jonathan Gräfe

Abgabe bis 1. März 2021

Im Folgenden findest Du 5 Aufgaben. Insgesamt können dabei 25 Punkte erreicht werden (5 pro Aufgabe). Die Lösungen können bis 1.März 2021 per Mail an info@ioaa-germany.de gesendet werden. Du kannst Deine Lösung am Computer schreiben oder per Hand und dann einscannen. Bitte sende uns möglichst nur eine Datei in der Form vorname-nachname.pdf und nicht unzählige Einzelbilder. Wenn Lösungen eingescannt werden, dann füge diese bitte zu einem PDF-Dokument zusammen. Sollten im Verlaufe der Bearbeitung Fragen auftauchen, können diese natürlich auch per Mail gestellt werden.

Viel Erfolg und Spaß beim Bearbeiten der Aufgaben!

Erinnert euch daran, nach oben in die Sterne zu blicken und nicht nach unten auf eure Füße! Versucht, dem, was ihr seht, Sinn zu geben, und fragt euch, was das Universum existieren lässt. Seid neugierig. Wie schwierig das Leben auch erscheinen mag, es gibt immer etwas, was ihr tun könnt und worin ihr erfolgreich sein könnt. Stephen Hawking

Aufgabe 1 Gubernatio

Im Rahmen einer Untersuchung der Himmelskörper am äußersten Rand des Sonnensystems wird in der Zukunft ein Rover zum Zwergplaneten *Makemake* (Durchmesser 1430 km, Abstand zur Sonne 45 AE) geschickt. Die Steuerung des Rovers soll direkt von der Erde aus erfolgen. Dafür wird er mit einem Sensor ausgerüstet, der die komplette Umgebung in der Sichtweite analysieren kann. Die Höhe des Sensors über dem Boden beträgt 2 m. Sobald die Astronomen auf der Erde mit Hilfe des Sensors feststellen, dass im Weg des Rovers eine Gefahr steht, wird die Bewegungsrichtung geändert.

1 Schätze die maximale Geschwindigkeit des Rovers ab, damit er alle Hindernisse umfahren kann. Vergleiche diesen Wert mit der Schrittgeschwindigkeit.

Aufgabe 2 SgrA*

Der diesjährige Physik-Nobelpreis ging zum Teil an die Astrophysiker aus Deutschland und der USA, die die Masse des supermassereichen Schwarzen Lochs im Zentrum unserer Milchstraße *Sgr A** gemessen haben, nämlich 4.3 Millionen Sonnenmassen. Die Forscher konnten die einzelnen Sterne selbst in der unmittelbaren Umgebung von SgrA* auflösen. S2 war wohl der beste Kandidat für diese Untersuchung, da seine Umlaufperiode ums galaktische Zentrum nur 16 Jahre beträgt. Bei seiner größten Annährung an SgrA* erreichte er circa $2,55\%$ der Lichtgeschwindigkeit.

2 Wie nah kommt S2 an SgrA*? Vergleiche diesen Wert mit dem Schwarzschild-Radius dieses Schwarzen Lochs.

Aufgabe 3 Sternpopulation

Unter einer Sternpopulation versteht man in der Astronomie eine Untermenge von Sternen, die ähnlich große Häufigkeiten der schweren chemischen Elemente aufweisen. Im Folgenden bezeichnen wir alle Elemente außer Wasserstoff und Helium als Metalle. Als Maß für die Metallizität eines Sterns definieren wir den Anteil der Metalle an der Gesamtmasse eines Sterns. Im Laufe der Sternentwicklung bilden sich die Metalle durch die Kernreaktionen aus Wasserstoff und Helium im Inneren des Sterns. Die entstandenen Metalle werden nach dem Sterntod wieder in das interstellare Medium eingespeist, aus dem weitere Sterngenerationen entstehen. Spätere Sterngenerationen haben folglich eine höhere Metallizität. Je häufiger dieser Prozess bereits durchlaufen wurde, umso mehr Metalle sind angereichert. Die Metallizität ist daher ein Maß für das Entstehungsalter eines Sternes. Betrachte nun folgendes Modell:

- Eine Galaxie wird am Anfang als eine Wolke aus Wasserstoff modelliert. Die Sternenstehung wird in Zyklen abgeleitet. Es entstehen immer Sterne einer Art. Bei jedem Zyklus entstehen aus einem Anteil p der Gesamtmasse Sterne. Der Rest der Masse bildet ein interstellares Medium.

- Durch die Kernfusion bilden sich im Kern Metalle aus einem Anteil m von Wasserstoff und Helium. Die schon vorhandenen Metalle bleiben bestehen.
- Nach einiger Zeit explodieren alle Sterne gleichzeitig. Die Metalle und Nichtmetalle vermischen sich und danach beginnt ein neuer Zyklus.

3 Berechne die Metallizität einer Sternpopulation nach $n = 100$ Zyklen. Verwende dabei $p = 0.1$ und $m = 0.01$.

Aufgabe 4 Meteorschauer

Täglich fallen auf die Erde mehrere Tonnen extraterrestrischen Materials. Beim Eindringen in die Erdatmosphäre erhitzt dessen Oberfläche sehr stark, wodurch die umgebenden Luftmoleküle ionisiert werden. Diese kurzlebigen Leuchtphänomene bezeichnet man als Meteore. Die Leuchtspuren, die die Meteore auf ihrem Weg hinterlassen, sind in der Tat die Plasmaschweife, welche mittels niederfrequentem Radar sichtbar gemacht werden können. Empfangen werden dabei nur diejenigen Radiosignale, welche von dem Plasmaschweif reflektiert werden können.

4.1 Berechne die minimale Elektronendichte im Plasmaschweif, damit eine typische Frequenz des Radars von 140 MHz an ihm reflektiert wird. *Stichwort:* Plasmafrequenz.

Um den Meteor detektieren zu können, benötigt man sowohl eine Sende- als auch eine Empfangseinheit. Nimm an, ein Meteor bewege sich entlang einer Geraden mit einer Neigung von 45° zur Erdoberfläche. Dieser Pfad liegt in der Ebene, die senkrecht zur Erdoberfläche steht und die Linie Sendeeinheit-Empfangseinheit enthält. Der Abstand zwischen zwei Einheiten beträgt 150 km. Das Signal von Sende- bis zur Empfangseinheit benötigte bei der Detektion genau 1 ms.

4.2 Wenn der Meteor die Erdoberfläche erreichen würde, wie weit entfernt von der Empfangseinheit könnte man ihn finden? Gib außerdem die Höhe des Meteors zu dem Zeitpunkt an, als er detektiert wurde. Vernachlässige die Krümmung der Erdoberfläche.

Aufgabe 5 Flaches Universum

In dieser Aufgabe geht es um die Entwicklung eines flachen, materiedominierten Universums. Die Vakuumsenergie des Universums, die die Expansion des Universums verstärkt vorantreibt, soll dabei vernachlässigt werden. Das Universum wird in diesem Modell als eine Kugel mit Radius R_0 und der Dichte ρ_0 zur Zeit t_0 (heute) betrachtet. Für ein sich kugelsymmetrisch ausdehnendes bzw. zusammenziehendes Universum verändert sich der Radius mit der Zeit nach einer Funktion $a(t)$, dem sogenannten Skalenfaktor: $R(t) = a(t)R_0$.
Gegeben ist im Folgenden die erste 1. Friedmann-Lemaitre-Gleichung, die die Expansion des Kosmos beschreibt:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{Kc^2}{a^2(t)}$$

$H(t)$ ist der sogenannte Hubble-Parameter. Der heutige Wert des Hubble-Parameters wird als Hubble-Konstante H_0 bezeichnet: $H_0 = 71 \frac{km/s}{Mpc}$. Die Konstante K gibt Aufschluss über die Geometrie des Universums. Ist $K = 0$, so bezeichnet man das Universum als flach.

5.1 Die mittlere Dichte in einem flachen Universum wird als kritische Dichte ρ_c bezeichnet. Finde einen Ausdruck für die kritische Dichte und zeige, dass die Gesamtenergie im flachen Universum 0 ist.

5.2 Zeige, dass in diesem Modell gilt:

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

Bestimme zudem das Alter des Universums nach diesem Modell!

5.3 Nehme an, die Dichte des heutigen Universums entspricht der kritischen Dichte. Diese nimmt durch die Expansion des Universums mit der Zeit ab. Berechne die Dauer, die es von heute in einem flachen, materiedominierten Universum benötigen würde, bis sich im Durchschnitt nur noch ein Proton pro Kubikmeter befindet.

5.4 Eine Galaxie hat eine Rotverschiebung von $z = 3.5$. Berechne die Zeit, die das Licht nach diesem Modell gebraucht hätte, um die Erde zu erreichen!